Section A1 (Programme M')

MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

I

Soit G l'ensemble des nombres complexes de la forme $u + iv$, où u et v sont des entiers relatifs.

1° Vérifier que G est un sous-anneau du corps C des nombres complexes.

Donner les éléments inversibles de l'anneau G.

2° Démontrer que pour tout nombre complexe z il existe un élément g de G tel que $|z-g| < 1$. En déduire que pour tout couple (a, b) d'éléments de G, avec $b \neq 0$, il existe un couple (q , r) d'éléments de G tel que $a = bq + r$ et $|r| < |b|$ (on pourra poser $z = a/b$). Le couple (q , r) est-il unique ?

3° Établir que tout idéal de G est principal.

4° Prouver que si J est un idéal non nul de G , l'anneau-quotient G/J est fini. Combien G/J a-t-il d'éléments dans le cas particulier où l'idéal J est engendré par l'élément $1 + i$?

II

Soit h une forme hermitienne positive et non dégénérée sur l'espace vectoriel complexe C^2 .

1° Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que :

$$h(x, y) \geqslant \alpha (|x^2| + |y^2|) \quad , \quad (x, y) \in C^2 .$$

2° Démontrer qu'il existe un élément (a, b) de $G^2 - \{(0, 0)\}$ tel que :

$$h(a', b') \geqslant h(a , b) \quad , \quad (a' , b') \in G^2 - \{(0, 0)\} .$$

3° Vérifier qu'il existe un élément (c , d) de G^2 tel que $ad - bc = 1$.

4° On considère l'application f : $G \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = h(c + ag, d + bg)$. Montrer qu'il existe g_0 dans G tel que

$$f(g) \geqslant f(g_0) \quad , \quad g \in G.$$

5° Établir que si Δ désigne le déterminant de h dans la base canonique de C^2 on a $\big(h(a , b)\big)^2 \leqslant 2\Delta$.

III

On se donne un nombre complexe k et pour chaque entier $n > 0$, la forme hermitienne h_n sur C^2 définie par :

$$h_n(x , y) = n\,|x - ky|^2 + \frac{1}{n}\,|y|^2 \quad , \quad (x , y) \in C^2,$$

1° Démontrer que pour tout $n > 0$ il existe un élément (a , b) de $G^2 - \{(0 , 0)\}$ tel que $h_n(a , b) \leqslant \sqrt{2}$.

2° En déduire qu'il existe une infinité d'éléments (a , b) de G^2 tels que

$$|a - kb|\,|b| \leqslant 1/\sqrt{2}.$$

IV

Soit d un élément de G qui n'est pas carré d'un élément de G.

1° Montrer qu'il existe une infinité d'éléments (a , b) de G^2 tels que

$$|a^2 - db^2| \leqslant \big(1 + 2\sqrt{|d|}\big)/\sqrt{2}.$$

2° Démontrer qu'il existe un élément q non nul de G et un élément (a , b) de G^2 satisfaisant l'égalité $a^2 - db^2 = q$ et tels qu'il existe une infinité d'éléments (a' , b') de G^2 vérifiant

$$a - a' \in (q) \ , \ b - b' \in (q) \ , \ a'^2 - db'^2 = q,$$

où (q) désigne l'idéal de G engendré par q .

En déduire qu'il existe une infinité d'éléments (a'' , b'') de G^2 tels que

$$a''^2 - db''^2 = 1 .$$

On pourra remarquer que

$$(a^2 - db^2)\,(a'^2 - db'^2) = (aa' - dbb')^2 - d(ab' - a'b)^2$$

3° Montrer que si, de plus, d est un entier positif, il existe une infinité de couples (u , v) d'entiers relatifs tels que $u^2 - dv^2 = 1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail